数理解析研究所講究録
第2071巻 2018年 160-164

トロイダル量子群と Bethe 仮設

立教大学理学部 神保道夫
Michio Jimbo, Rikkyo University

2017 年 3 月

1 背景：量子 KdV 系

本稿では文献 [FKSW] において導入された量子可積分系の Bethe 仮説について、最近得られた結果を紹介する。本来の問題は共形場理論における運動の保存量の対角化である。その背景を簡単に述べよう。

よく知られているように、Virasoro 代数の包絡環の完備化には運動の保存量 (IM) とよばれる可換な元の無限系列 $\mathbb{I}_1,\mathbb{I}_3,\mathbb{I}_5,\cdots$ が存在する。これらは Virasoro 代数の Verma 加群に well defined に働く可換な作用素族となり、さらに Verma 加群の各斉次成分を保存する。後者は有限次元ベクトル空間であり、IM のそこでの同時スペクトルを記述することは自然な問題である。なお、IM は古典極限において KdV 方程式の保存量と一致するので、それらが定める量子可積分系を量子 KdV 系ということがある。

Dorey, Tateo[DT], Bazhanov, Lukyanov, Zamolodchikov[BLZ] は、IM の同時固有値とある種の Schrödinger 作用素の族 (Oper) との間に 1 対 1 対応がある、という著しい現象を発見した。ただし現在のところ証明が与えられているのは最高ウエイトベクトルの場合に限られる。この対応は ODE/IM 対応として知られ、その後アフィンリー環の枠組みで一般化されているが、そのような対応が存在する理由はいまだによくわかっていない。

Feigin, Kojima, Shiraishi, Watanabe[FKSW] は量子 KdV 系の変形 Virasoro アナログを導入した。本来の IM は local density （すなわち Virasoro 代数のカレント $T(u)$ の微分多項式）の 1 重積分の形をしており local IM とよばれるが、[BLZ2] はまた non-local IM とよばれる別の可換な系列 $\mathbb{G}_1,\mathbb{G}_2,\cdots$ を $T(u)$ の多重積分の形で導入している。local IM と non-local IM どうしもまた互いに可換である。[FKSW] は変形 Virasoro 代数のカレントおよびスクリーニングカレントを用いてそれぞれ $\mathbb{I}_N$, $\mathbb{G}_N$ の類似を定義し、直接計算によってそれらの可換性を示している。(なお変形アナログでは $\mathbb{I}_N$ は local density の積分ではないが、[FKSW] にならって $\mathbb{I}_N$, $\mathbb{G}_N$ の類似もそれぞれ “local” “non-local” とよぶことにする。)

変形アナログの IM の固有値についてはこれまで知見がなかった。その一つの理由は、[FKSW] の時点ではこれら IM の正体がよくわからなかった点にあると思われる。その後 W 代数の理論や AGT 予想などの進展を経て、(本来の) IM は適当な量子代数の R 行列の転送行列から得られるということが認識されるようになった。本稿では [FKSW] の変形された IM が量子トロイダル代数の転送行列の展開係数であることを述べる。ついで local IM の場合にこの転送行列に対する Bethe 仮説の結果 [FJMM] を報告する。

2 量子トロイダル代数

本稿で用いる量子トロイダル代数は $\mathfrak{gl}_n$ 型とし、それを記号 $\mathcal{E}_n$ であらわす。$\mathcal{E}_n$ は 2 変数ローラン多項式環 $\mathfrak{gl}_n[x^{\pm1},y^{\pm1}]$ の 2 次元中心拡大に対応する量子群である。$\mathfrak{gl}_1$ 型の場合、すなわち $\mathcal{E}_1$ は Ding-Iohara-Miki 代数ともよばれる。定義の詳細はたとえば [Sa], [Mi], [Ng], [FJMM] などを参照していただくことにし、ここでは $\mathcal{E}_n$ の特徴を挙げるにとどめる。

- $\mathcal{E}_n$ は量子化のパラメタ q の他にもう一つ独立なパラメタ q_1 を持つ。以下 $q_1q_2q_3=1$ を満たすパラメタ

q_1, q_2, q_3 $(q^2 = q_2)$ を用いる。

- $\mathcal{E}_n$ は Drinfeld 生成元に類似のカレント $E_i(z)$, $F_i(z)$, $K_i^{\pm}(z)$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ と中心元 $C, C^{\perp}$ で生成される。これらはそれぞれ $\mathfrak{gl}_n[x^{\pm1}, y^{\pm1}]$ の次の元の母関数に相当する：

$$E_{i,i+1} \otimes x^m y\,, \quad E_{i+1,i} \otimes x^m y^{-1}\,, \quad E_{i,i} \otimes x^m y^0 \quad (i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,,\ m \in \mathbb{Z}).$$

- x, y の役割を入れ替えてもう一組のカレント $E_i^{\perp}(z)$, $F_i^{\perp}(z)$, $K_i^{\pm,\perp}(z)$ が定義される。この2組は $\mathcal{E}_n$ の自己同型 [Mi] でうつり合う。
- $\mathcal{E}_n$ は Drinfeld 型の余積によりホップ代数の構造を持つ。また普遍 R 行列 $\mathcal{R} \in \mathcal{E}_n \hat{\otimes} \mathcal{E}_n$ が存在する。

カレント $E_i(z)$, $F_i(z)$, $K_i^{\pm}(z)$ を用いて、C が 1 で働く適当な最高ウエイト加群の圏 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_n}$ を設定すると量子アフィン代数の有限次元表現論に類似した議論が展開できる[*1]。この圏の simple object は有理関数の組（最高ウエイトベクトル v 上の $K_i^{\pm}(z)$ の固有値）で分類される。たとえば Fock 表現 $\mathcal{F}_\nu(u)$ $(\nu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, u \in \mathbb{C}^{\times})$ は次で定義される。

$$K_\nu^{\pm}(z)v = q\frac{1 - q_2^{-1}u/z}{1 - u/z}v\,, \quad K_i^{\pm}(z)v = v \ (i \neq \nu).$$

これは $U_q\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の evaluation module $(\mathbb{C}^2)_u$ に相当する最も基本的な表現であるが、partition の集合を基底に持つ無限次元表現である。この基底でカレント $E_i(z), F_i(z), K_i^{\pm}(z)$ の行列要素はパラメタ q_s の因子化した有理関数で具体的に表示できる。またカレント $E_i^{\perp}(z), F_i^{\perp}(z), K_i^{\pm,\perp}(z)$ は vertex operator により実現される [Sa]。

Fock 表現でトレースをとることにより、転送行列

$$T_\nu^{\mathfrak{gl}_n}(u) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{F}_\nu(u),1}\Big(\big(p^{d^\perp}\prod_{i=1}^{n-1} p_i^{H_{i,0}^{\perp}}\big)_1 \mathcal{R}_{12}\Big) = \sum_{N=0}^{\infty} u^{-N} I_{\nu,N}^{\mathfrak{gl}_n}$$

を考えることができる。ここで $p, p_1, \cdots, p_{n-1}$ はパラメータ、また $K_i^{+}(\infty) = q^{H_{i,0}}$ である。Yang-Baxter 方程式により、係数 $I_{\nu,N}^{\mathfrak{gl}_n}$ は互いに可換となる。

このとき次が成り立つ。以下 $\mathfrak{gl}_1$ の場合添え字 ν は省略する。

Proposition 2.1. *(1)* $\mathcal{E}_1$ *の Fock 表現 n 個のテンソル積* $\mathcal{F}(v_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(v_n)$ *上の作用素と見たとき,* $\{I_N^{\mathfrak{gl}_1}\}_{N \geq 0}$ *は [FKSW2], [KS] で導入された変形 W_n 代数の local IM と本質的に一致する (すなわち、生成元の取り方は異なるが同じ可換部分代数を生成する)。*

(2) $\mathcal{E}_n$ $(n \geq 2)$ *の Fock 表現 1 個* $\mathcal{F}_\nu(v)$ *上の作用素と見たとき、*$\{I_{\nu,N}^{\mathfrak{gl}_n}\}_{\substack{N\geq 0\\ \nu \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}}$ *は上掲の変形 W_n 代数の non-local IM と一致する。*

$n = 2$ が前節で触れた変形 Virasor 代数の場合である。詳細は [FJM] に準備中であるが、証明に必要な計算は本質的に [FT] に与えられている。

3 Bethe 仮設

これ以後は $\mathcal{E}_1$ の場合に限定し、local IM $\{I_N^{\mathfrak{gl}_1}\}$ を Fock 表現のテンソル積

$$W = \mathcal{F}(v_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(v_n)$$

で考える。パラメタ $q_1, q_2, p, v_1, \cdots, v_n$ は generic とする。

[FJMM] で得られた結果は次の通りである。

[*1] 一般論ができているのはいまのところ $\mathcal{E}_1$ の場合のみである。

Theorem 3.1. *(1)local IM の同時固有ベクトル $w \in W$ に対し、多項式 $Q_w(u), \mathcal{T}_w(u)$ が存在して次の TQ 関係式*

$$\mathcal{T}_w(u)Q_w(u) = a(u)\prod_{s=1}^{3} Q_w(q_s^{-1}u) + pd(u)\prod_{s=1}^{3} Q_w(q_s u) \tag{3.1}$$

を満たす。ここで $a(u), d(u)$ は W のみから定まるある有理関数である。$Q_w(u)$ の根 t_j は Bethe 方程式

$$a(t_j)\prod_{k(\neq j)}\prod_{s=1}^{3}(q_s^{-1}t_j - t_k) = pd(t_j)\prod_{k(\neq j)}\prod_{s=1}^{3}(q_s t_j - t_k) \quad (j = 1, \cdots, \deg Q_w) \tag{3.2}$$

の解となる。

(2) 対応する転送行列の固有値 $T_w(u)$ は次の公式で与えられる：

$$T_w(u) = \frac{Q_w(q_2^{-1}u)}{Q_w(u)}\sum_{\lambda}\prod_{\square\in\lambda}\mathfrak{a}_w(q^{-\square}u;p), \quad \mathfrak{a}_w(u) = p\frac{d(u)}{a(u)}\prod_{s=1}^{3}\frac{Q_w(q_s u)}{Q_w(q_s^{-1}u)}. \tag{3.3}$$

和はすべての分割 λ をわたる。また λ の node $\square = (i,j) \in \lambda$ に対して $q^{\square} = q_3^{i-1}q_1^{j-1}$ とおく。

(3.3) の両辺を u^{-1} で展開すれば、$\{I_N^{\mathfrak{gl}_1}\}$ の固有値が t_j^{-1} の対称多項式で表示される。

関係式 (3.1) は $U_q\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の場合によく知られている TQ 関係式

$$T(u)Q(u) = a(u)Q(q^{-2}u) + pd(u)Q(q^2u) \tag{3.4}$$

の類似であるが、次の２点で異なっている: (i) (3.1) 左辺の $\mathcal{T}_w(u)$ は転送行列の固有値 $T_w(u)$ ではない、(ii)(3.1) 右辺は $Q_w(u)$ について非線形になっている。

なお (3.2) の形の Bethe 方程式は、極限 $q_s \to 1$ にあたる系について、Litvinov により予想されていた [L]。

4 方法

最後に、定理の証明についてコメントする。

Bethe 方程式の導出法の一つとして、転送行列 $T(u)$ と可換な作用素 $Q(u)$ であって関係式 (3.4) を満たすものを作る Baxter の方法がある。通常のアフィン量子群 $U_q\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の場合、[BLZ3] は作用素 $Q(u)$ を $U_q\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の Borel 部分代数の（$U_q\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 全体には拡張できない）表現の上でトレースをとることによって構成した。この方法は一般のアフィン量子群の枠組みに拡張できる。必要な Borel 部分代数の表現の研究は [HJ], $Q(u)$ の構成は [FH] においてなされている。

[FJMM] は上述の方法をさらにトロイダル量子群 $\mathcal{E}_1$ に拡張したものである。$\mathcal{E}_1$ の場合とパラレルに、"Borel 部分代数" の表現の圏 $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ を設定する。有理関数 $\Psi(z)$ を最高ウエイトとする simple object を $L(\Psi)$ であらわす。$\mathcal{E}_1$ の場合と異なり、$\Psi(z)$ は $z = \infty$ で正則非零であればよく、$z = 0$ での条件は不要になる。たとえば次の $M^+(u)$, $N^+(u)$ は ($\mathcal{E}_1$ 加群には拡張できない) $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ の object である。

$$M^+(u) = L(1 - u/z), \quad N^+(u) = L\Big(\frac{\prod_{s=1}^{3}(1 - q_s^{-1}u/z)}{1 - u/z}\Big).$$

定理は次の２つの主張から従う。

Proposition 4.1. *$\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ の Grothendieck 環のなかで等式*

$$[N^+(u)][M^+(u)] = \prod_{s=1}^{3}[M^+(q_s^{-1}u)] + \prod_{s=1}^{3}[M^+(q_s u)]\{-1\}$$

が成り立つ（$\{-1\}$ は degree shift)。

Proposition 4.2. $M^+(u)$, $N^+(u)$ に対応する転送行列をそれぞれ

$$Q(u) = f_M(u)\mathrm{Tr}_{M^+(u),1}\big((p^{d^\perp})_1\mathcal{R}_{12}\big)\,,$$
$$\mathcal{T}(u) = f_N(u)\mathrm{Tr}_{N^+(u),1}\big((p^{d^\perp})_1\mathcal{R}_{12}\big)\,,$$

とする。スカラー因子 $f_M(u)$, $f_N(u)$ を適当に選ぶと、$Q(u)$, $\mathcal{T}(u)$ は W の各ベクトル上で u の多項式となる。

同様の構成は non-twisted な量子アフィン代数に対しても可能である [FJMM2]。Q operator に対応する加群 $M^+(u)$ は量子アフィン代数の場合 [FH] に導入されているものの類似であるが、$\mathcal{T}(u)$ に対応する加群 $N^+(u)$ の構成はアフィンの場合にも新しい。($N^+(u)$ は独立に文献 [HL] でも導入されたが Bethe 仮設との関係については触れられていない。)

上で述べた結果は $\mathcal{E}_n$ $(n \geq 2)$ の場合にもほぼそのまま成立することが期待される。しかし $\mathcal{E}_n$ のよい PBW 基底がわかっていないなど技術的な困難があって、上記の方法を拡張することはできていない。また ODE/IM 対応にあらわれる微分作用素 (Oper) を理解することが当初の動機であったが、上述の Bethe 方程式と Oper との関係は依然として不明である。

参考文献

[BLZ] V. Bazhanov, S. Lukyanov and A. Zamolodchikov, Spectral determinants for Schrödinger equation and Q-operators of conformal field theory, *J. Stat. Phys.* **102** (2001) 567–576; Higher level eigenvalues of Q-operators and Schrödinger equation, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**(2003) 711–725.

[BLZ2] V. Bazhanov, S. Lukyanov and A. Zamolodchikov, Integrable structure of conformal field theory, quantum KdV theory and thermodynamic Bethe ansatz, Commun. Math. Phys.**177** (1996) 381–398; *ibid.***190** (1997) 247–278.

[BLZ3] V. Bazhanov, S. Lukyanov and A. Zamolodchikov, *ibid.* **200** (1999) 297–324.

[DT] P. Dorey and R. Tateo, Anharmonic oscillators, the thermodynamic Bethe ansatz, and non-linear integral equations, *J. Phys. A* **32** (1999) L419–L425.

[FH] E. Frenkel and D. Hernandez, *Baxter's relations and spectra of quantum integrable models*, Duke Math. J. **164** (2015) 2407–2460.

[FJMM] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, and E. Mukhin, *Finite type modules and Bethe ansatz for the quantum toroidal* $\mathfrak{gl}_1$, ArXiv:1603.02765[math.QA]

[FJMM2] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, and E. Mukhin, *Finite type modules and Bethe ansatz equations*, ArXiv:1609.05724[math.QA], to appear in J. Henri Poincaré.

[FJM] B. Feigin, M. Jimbo and E. Mukhin, *Integrals of motion from quantum toroidal algebras*, 準備中.

[FKSW] B. Feigin, T. Kojima, J. Shiraishi and Watanabe, The integrals of motion for the deformed Virasoro algebra, arXiv:0705.0427v2

[FKSW2] B. Feigin, T. Kojima, J. Shiraishi and H. Watanabe, The integrals of motion for the deformed W algebra $W_{q,t}\big(\widehat{\mathfrak{sl}}_N\big)$, arXiv:0705.0627v1

[FT] B. Feigin and A. Tysmbaliuk, Bethe subalgebras of $U_q\big(\widehat{\mathfrak{gl}}_n\big)$ via shuffle algebras, *Selecta Math.* **22** (2016) 979–1011.

[HJ] D. Hernandez and M. Jimbo, Asymptotic representations, *Compositio Math.* **148** (2012) 1593 - 1623.

[HL] D.Hernandez and Leclerc, Cluster algebras and category $\mathcal{O}$ for representations of Borel subalgebras of quantum affine algebras, *Algebra Number Theory* **10** (2016) 2015–2052.

[KS] T. Kojima and J. Shiraishi, The integrals of motion for the deformed W algebra $W_{q,t}\big(\widehat{\mathfrak{sl}}_N\big)$ II: Proof of the commuation relations, *Commun. Math. Phys.* **283** (2008) 795–851.

[L] A. Litvinov, On spectrum of ILW hierarchy in conformal field theory, *JHEP* **11** (2013) 155; M. Alfimov and A. Litvinov, On spectrum of ILW hierarchy in conformal field theory II: coset CFT's, arXiv:1411.3313v1

[Mi] K. Miki, Toroidal braid group action and an automorphisim of toroidal algebra $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1,tor})$ $(n \geq 2)$, *Lett. Math. Phys.* **47** (1999) 365–378.

[Ng] A. Negut, *The shuffle algebra revisited*, Int. Math. Res. Notices **22** (2014), 6242–6275; Quantum toroidal and shuffle algebras, R-matrices and a conjecture of Kuznetsov, arXiv:1302.6202v3

[Sa] Y. Saito, Quantum toroidal algebras and their vertex representations, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **34** (1998) 155–177.